

Probabilistyka i statystyka

Zestaw 5

rozkład zmiennej losowej

1. W grupie studenckiej przeprowadzono sprawdzian. Niech X oznacza ocenę (przy czterostopniowej skali ocen) losowo wybranego studenta. Zakładając, że stosunek ocen bardzo dobrych, dobrych, dostatecznych i niedostatecznych ma się tak jak 1:3:4:2, wyznaczyć dla zmiennej losowej:

- funkcję prawdopodobieństwa oraz jej wykres,
- dystrybuantę oraz jej wykres
- prawdopodobieństwo, że $P(X < 3,5)$, korzystając z funkcji prawdopodobieństwa oraz korzystając z dystrybuanty (zaznaczyć to prawdopodobieństwo na wykresie dystrybuanty)
- prawdopodobieństwo $P(3 \leq X < 4,5)$ korzystając z funkcji prawdopodobieństwa oraz korzystając z dystrybuanty (zaznaczyć to prawdopodobieństwo na wykresie dystrybuanty)
- na wykresie dystrybuanty podać interpretację prawdopodobieństwa $P(X=3)$.

2. Dystrybuanta F zmiennej losowej X określona jest następującą tabelką:

x	$(-\infty, -3)$	$[-3, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 6)$	$[6, +\infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,5	0,9	1

Proszę wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa tej zmiennej.

3. Gęstością prawdopodobieństwa $f(x)$ zmiennej losowej X jest:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

Proszę znaleźć dystrybuantę $F(x)$ i obliczyć prawdopodobieństwo $P(X > 2)$ i podać jego interpretację na wykresie gęstości i na wykresie dystrybuanty.

4. Zmienna losowa X jest określona za pomocą dystrybuanty:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3}, & x \geq 2 \end{cases}$$

Proszę wyznaczyć funkcję gęstości prawdopodobieństwa, wartość oczekiwaną oraz wariancję.

5. Proszę wyznaczyć stałą C tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ Cx & \text{dla } 0 < x \leq 4 \\ 0 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Proszę podać dystrybuantę zmiennej X oraz oblicz $P(1 < X < 2)$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Proszę oblicz następujące prawdopodobieństwa:

- a) $P(0 < X < 2)$
- b) $P(X > 2)$
- c) $P(X < -0,5)$
- d) $P(|X| < 1)$

Wskazówka: Proszę skorzystać z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego $F(z)$, oraz skorzystać z zależności: $P(Z < -a) = P(Z > a)$, oraz $F(-a) = 1 - F(a)$

9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wzrost losowo wybranej osoby znajduje się w przedziale 190 cm – 200 cm, jeśli populacja jest opisana rozkładem normalnym $N(172,6)$?

Wskazówka: proszę wprowadzić zmienną losową standaryzowaną Z , skorzystać z tablicy dystrybuanty rozkładu normalnego $F(z)$